Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht

MNU

Jahrgang 58
Heft 1–8
Jan.–Dez. 2005

Bildungsverlag
E1NS
Dümmler

Reinhard Oldenburg

Ableitungen alternativ berechnen

Die Herleitung von Ableitungsregeln aus der Grenzwertdefinition bleibt im Unterricht deshalb oft isoliert, weil geeignete Übungsmöglichkeiten fehlen. Solche bieten sich durch eine kleine Variation der Definition der Ableitung an, die zudem einige Herleitungen erleichtert.

1 Einleitung

Die Herleitung von Ableitungsregeln ist eine traurige Monokultur, da es kaum methodische Variation gibt. Eine Beschäftigung mit diesen Herleitungen unterbleibt dann häufig, denn es herrscht der Eindruck vor, man könne ohnehin nichts anderes tun, als die Lehrbuchbeweise zu reproduzieren. Damit werden auch in diesem Bereich Beweise als anspruchsvoller Inhalt des Mathematikunterrichts immer mehr an den Rand gedrängt. Es fehlt an Variationen in der Aufgabenstellung, die zwischen reiner Reproduktion und dem Finden subjektiv neuer Beweise liegt.
Erschwerend kommt hinzu, dass einige der Rechnungen bei den Herleitungen von Ableitungsregeln aufwändig sind, so dass man diese gerne ein für alle mal hinter sich hat und sich jedes echte Nachdenken darüber erspart. Damit bleiben aber die formalen Ableitungsregeln in Schülersicht weit entfernt vom Grenzwertbegriff.
In diese Situation soll etwas Abwechslung gebracht werden durch eine unkonventionelle Fassung des Differentialquotienten, die sich zwar nicht als alleinige Version empfiehlt, die aber als Variation hilfreich sein kann.

2 Von Summen und Produkten

Der Weg von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung oder seine Entsprechung in der Sprache der Anderungsraten führt – auf welchem Präzisierungsniveau auch immer – zu einem Problem der Art

$$f'(x) = \lim_{x_2 \to x} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Es ist dann sinnvoll, die Aufmerksamkeit etwas von der Stelle x weg hin zur Differenz $h = x_2 - x$ zu lenken und die Ableitung also als

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

zu schreiben. Entscheidend an dieser Stelle ist, dass der Grenzwert so ausgeführt wird, dass die Sekantensteigung an zwei gegeneinander konvergierenden Stellen berechnet wird. Dies kann man erreichen, indem man die Differenz der Stellen gegen null gehen lässt – oder auch anders. Eine alternative Möglichkeit soll hier erkundet werden.
Eine Alternative ist, als x_2 ein Vielfaches von x zu nehmen, also mit Produkten statt Summen zu arbeiten: $x_2 = sx$. Der Grenzfall ist dann durch $s = 1$ gegeben:

$$f'(x) = \lim_{s \to 1} \frac{f(sx) - f(x)}{sx - x}$$

Diese Variation ist m. E. schon in sich interessant, da sie das Reden über Grenzwerte detailreicher macht und damit etwas vor der Verholzung in immer gleiche Formulierungen bewahren sollte. Hat sie aber auch praktische Vorteile?

3 Ableitungsregeln

Der eben betrachtete Grenzwert wird nun an einigen Funktionen getestet. Mit Schülern würde man natürlich erst einmal besonders einfache Beispiele behandeln, deren bekanntes Ergebnis das Vertrauen in die neue Formulierung festigen kann. Wir aber gehen gleich auf größere Ziele los.

3.1 Potenzfunktionen

Sei also $f(x) = x^n$ mit einer natürlichen Zahl als Exponent. Dann ist

$$f'(x) = \lim_{s \to 1} \frac{f(sx) - f(x)}{sx - x} = \lim_{s \to 1} \frac{s^n x^n - x^n}{x(s-1)} = x^{n-1} \lim_{s \to 1} \frac{s^n - 1}{s - 1}$$

Der letzte Term löst sich in Wohlgefallen auf, wenn man weiß, dass $s^n - 1 = (s-1) \cdot (s^{n-1} + s^{n-2} + \ldots + s + 1)$. Der letzte Bruch ist also $s^{n-1} + s^{n-2} + \ldots + s + 1$ und für $s \to 1$ wird das einfach n.

3.2 Wurzelfunktionen

Sei also $f(x) = x^{1/n}$ mit einer natürlichen Zahl als Exponent. Dann ist

$$f'(x) = \lim_{s \to 1} \frac{f(sx) - f(x)}{sx - x} = \lim_{s \to 1} \frac{s^{1/n} x^{1/n} - x^{1/n}}{x(s-1)}$$

$$= x^{1/n-1} \lim_{t \to 1} \frac{t-1}{t^n - 1}.$$

Im letzten Schritt wurde die Substitution $t = s^{1/n}$ durchgeführt. Mit dem gleichen Argument wie bei den Potenzfunktionen sieht man jetzt

MNU 58/6 (1. 9. 2005) Seiten 343–344 ISSN 0025-5866

$$f'(x) = x^{1/n-1} \lim_{t \to 1} \frac{t-1}{t^n - 1} = \frac{x^{1/n-1}}{n}.$$

3.3 Logarithmusfunktion

$$\ln'(x) = \lim_{s \to 1} \frac{\ln(sx) - \ln(x)}{sx - x}$$

$$= \lim_{s \to 1} \frac{\ln(s) + \ln(x) - \ln(x)}{x(s-1)} = \frac{1}{x} \lim_{s \to 1} \frac{\ln(s)}{s-1}.$$

Hier muss nun grafisch argumentiert werden: Die Tangente an den Grafen der ln-Funktion an der Stelle 1 besitzt die Gleichung $s - 1$, denn für die natürliche Basis soll die Steigung gerade 1 sein und alle Logarithmusfunktion gehen durch (1; 0). Dann ist klar, dass der Grenzwert eins ist und die Ableitung einfach die Kehrwertfunktion.

4 Ausblick

Schwierig ist dagegen, auf dieser Basis die trigonometrischen Funktionen oder die Exponentialfunktionen abzuleiten: Diese erfüllen schöne Additions- aber keine Multiplikationstheoreme. Man sieht also, dass man die Grenzwertstrategie der Problemklasse anpassen kann und sollte.
Verschwiegen werden darf natürlich nicht, dass diese Rechnungen nicht für $x = 0$ funktionieren. Diese Stelle muss gesondert betrachtet werden, beispielsweise indem eine verschobene Funktion untersucht wird.
Es ist interessant, diese Ableitungsdefinition auch mit Computeralgebra zu verfolgen. Die leistungsfähigen Grenzwertalgorithmen erlauben auch ausgehend von unserer Definition alle handelsüblichen Funktionen zu differenzieren.

Dr. Reinhard Oldenburg, Albrechtstr. 5, 37085 Göttingen, roldenburg@gmx.de, lehrt Mathematik, Physik und Informatik am Felix-Klein-Gymnasium in Göttingen.

Karl-Heinz Lotze

Die Sonnenscheinformel

Teil II: Anwendungen der Sonnenscheinformel

Die in Teil I des Aufsatzes hergeleitete Sonnenscheinformel wird benutzt, um die Entstehung der Jahreszeiten aus der Schrägstellung der Erdachse in Bezug auf die Erdbahnebene zu erklären. Weitere Anwendungen sind die Zeiten des Sonnenauf- und -untergangs, die Dämmerungsdauer, Polartag und -nacht sowie die Änderung der Sonnenscheindauer von einem Tag zum anderen.

1 Einleitung

Das wichtigste Ergebnis von Teil I dieses Aufsatzes ist die Sonnenscheinformel (I.18). Mit ihrer Hilfe kann man für jede geografische Breite und jeden Zeitpunkt im Laufe eines Jahres die Höhe der Sonne über dem Horizont bestimmen. Eine erste Anwendung war die Ermittlung der Mittagshöhen der Sonne zu Beginn der Jahreszeiten.
Der Hauptinhalt dieses zweiten Teils ist die Berechnung der Sonnenenergie, die an irgendeinem Tag auf einen Quadratmeter der Erdoberfläche entfällt. Dazu muss außer der über den Tag variierenden Sonnenhöhe auch die Sonnenscheindauer bekannt sein, die auf einfache Weise ebenfalls aus der Sonnenscheinformel folgt. Wir gelangen damit zu der Kernaussage dieses Aufsatzes, dass die Ursache für die Entstehung der Jahreszeiten die Schiefe der Ekliptik, also die Schrägstellung der Erdachse in Bezug auf die Erdbahnebene, ist.

Sozusagen nebenbei lässt sich eine Reihe von Eigenschaften des Sonnenscheins ableiten, die zwar mit den Jahreszeiten variieren, sich aber z.T. der Beobachtung weniger aufdrängen als die Jahreszeiten selbst. Es sind dies die Änderung der Tageslänge und wann diese am schnellsten erfolgt sowie die bürgerliche und astronomische Dämmerung. Die Polarregionen mit ihrer Erscheinung der Mitternachtssonne verdienen besondere Beachtung, und auch der Vergleich der Verhältnisse dort und am Erdäquator ist mitunter sehr instruktiv.
Die Sonnenschein- und Sonnenuntergangsformeln sind allgemein genug, um weitere interessante Anwendungen zu ermöglichen, welche wir dem interessierten Leser überlassen wollen. Gemeint ist eine vergleichende Betrachtung der Jahreszeiten auf allen Planeten des Sonnensystems, für die sich die Dauern von Jahr und Tag sowie die Neigungen der Rotationsachsen gegen die jeweilige Bahnebene von den entsprechenden Größen für die Erde unterscheiden.

2 Sonnenuntergang und Sonnenscheindauer

Der Sonnenuntergang erfolge τ_u Stunden nach dem Mittag des Tages n. Dabei ist $h = 0$, und die Sonnenscheinformel (I.18) ergibt

MNU 58/6 (1. 9. 2005) Seiten 344–350 ISSN 0025-5866